Séminaire de Master 2 Mathématiques
Théorème de Hall

Lacourte Octave

Encadré par Ludovic Marquis

12 Janvier 2017

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Topologie algébrique sur les graphes **3**
- 2.1 Graphes, chemin et groupe fondamental 3
- 2.2 Application de graphe 4
- 2.3 Des remarques sur les revêtements 5

3 Le théorème de Hall **7**
- 3.1 Une immersion spécifique 7
- 3.2 Transformer une immersion en revêtement 8
- 3.3 Le théorème de Hall 9

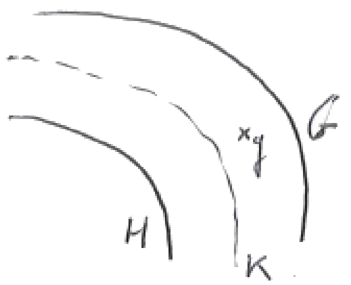
4 Conclusion **11**

Chapitre 1

Introduction

Un beau théorème dû à M. Hall affirme que tout groupe libre de rang fini est à sous-groupe séparable.

Définition 1. Un groupe G est dit à sous-groupe séparable si et seulement si pour tout sous-groupe de type fini H de G et pour tout $g \in G$ tel que $g \notin H$ il existe un sous-groupe K de G d'indice fini tel que $H \subset K$ et $g \notin K$.



Pour prouver ce théorème nous allons avoir besoin du pont qui existe entre les groupes libres et les graphes. En effet tout groupe libre à n générateurs peut se voir comme le groupe fondamental d'un bouquet (graphe composé d'un sommet avec n lacets de taille 1). On peut alors voir tout sous-groupe de type fini H d'un groupe libre G comme le groupe fondamental d'un revêtement d'un bouquet associé à G. La bijection entre les sous-groupes du groupe fondamental d'un graphe et ses revêtements jouera un rôle important. On peut alors énoncer le problème avec le vocabulaire des graphes :

Théorème 1. *Soit G un groupe libre et (Δ, v) un bouquet associé.*
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ des éléments de G. Soit H le sous-groupe de G généré par $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. On suppose que pour tout i on a $\beta_i \notin H$.
Alors il existe un revêtement fini $((\Gamma, u), f)$ de (Δ, v) tel que $H \subset f(\Pi(\Gamma, u))$ et pour tout i on a $\beta_i \notin f(\Pi(\Gamma, u))$.

Il apparaît donc important de comprendre la topologie sur les graphes avant de s'attaquer à ce théorème.

Chapitre 2

Topologie algébrique sur les graphes

2.1 Graphes, chemin et groupe fondamental

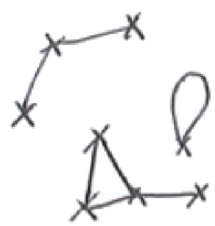
Il nous faut introduire tout le vocabulaire de la topologie algébrique mais pour les graphes. C'est pourquoi il faut définir tous les objets, on retrouvera une correspondance avec la topologie algébrique usuelle.

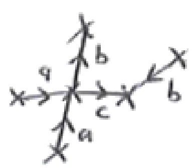
Définition 2. Un graphe Γ est la donnée de deux ensembles E et V et de deux fonctions $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ e & \mapsto & \overline{e} \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & V \\ e & \mapsto & i(e) \end{array} \right.$ telles que $\overline{\overline{e}} = e$ et $\overline{e} \neq e$.

On appelle alors e une arête dirigée et $\overline{e}$ la renversée de e. Les éléments de V sont les sommets de Γ et ceux de E les arêtes.
On dit que $i(e)$ est le sommet initial de l'arête e et on peut définir alors le sommet terminal comme $\tau(e) = i(\overline{e})$.

Définition 3. Une orientation de Γ est la donnée d'un choix d'une arête dans toutes les paires d'arêtes $\{e, \overline{e}\}$.

Il faut bien retenir que se donner une orientation ne change en rien le graphe.





Définition 4. Un chemin p dans Γ de longueur $n = |p|$ de sommet initial u et de sommet final v est un n-uplet d'arêtes de Γ noté $p = e_1 e_2 \ldots e_n$ tel que pour tout $i = 1, \ldots n-1$ on a $\tau(e_i) = i(e_{i+1})$ et $u = i(e_1),\ v = \tau(e_n)$.

Par convention pour tout sommet v d'un graphe Γ il existe un unique chemin Λ_v de longueur 0 tel que son sommet initial et son sommet final coïncident et sont égaux à v. On notera par la suite pour tout chemin $p = e_1 e_2 \ldots e_n$ le chemin retour $\overline{p} = \overline{e_n} \ldots \overline{e_2 e_1}$.

Dans le cas où les sommets initiaux et finaux coïncident on dit que le chemin est un circuit. Un circuit de la forme $e\overline{e}$ s'appelle un aller-retour.
Il apparaît naturellement une loi de concaténation dans les graphes où pour p, q deux chemins tels que le sommet initial de q est égal au sommet final de p on obtient le chemin pq de longueur $|pq| = |p| + |q|$.
On peut alors voir des réductions élémentaires des chemins en supprimant les aller-retours. En effet en supprimant un aller-retour d'un chemin p on obtient un chemin p' de même sommet initial et final tel que $|p'| = |p| - 2$. De plus un chemin est dit réduit s'il ne possède pas d'aller-retour.

Définition 5. On dit que deux chemins sont homotopes s'ils sont égaux à aller-retours près. Cette relation est une relation d'équivalence notée $\sim$.

Cette relation d'équivalence est compatible avec la concaténation. L'ensemble des $\sim$ classes est noté $\Pi(\Gamma)$. On peut remarquer que l'inverse est bien défini par $[p]^{-1} = [\overline{p}]$. On note $\Pi(\Gamma, v)$ l'ensemble des éléments de $\Pi(\Gamma)$ qui commencent et terminent par le sommet v. On l'appelle le groupe fondamental de Γ basé en v. C'est effectivement un groupe grâce à la remarque sur l'inverse. De plus tout chemin est dans la classe d'équivalence d'un unique chemin réduit.

2.2 Application de graphe

Maintenant que l'on a pu définir un groupe fondamental d'un graphe, on aimerait pouvoir relier les sous-groupes de ce groupe fondamental avec les revêtements du graphe. On commence donc par définir ce que sont des applications de graphe.

Définition 6. Soient Γ et Δ deux graphes. Une application de graphe $f : \Gamma \to \Delta$ est la donnée d'une paire de fonction : une pour les arêtes et une pour les sommets que nous noterons toutes les deux f aussi. De plus il faut préserver la structure de graphe, c'est-à-dire que pour toute arête e on a $f(\overline{e}) = \overline{f(e)}$ et $i(f(e)) = f(i(e))$.

Définition 7. Soit Γ un graphe et v un sommet de ce graphe. L'étoile de v dans Γ est l'ensemble des arêtes de Γ défini par :

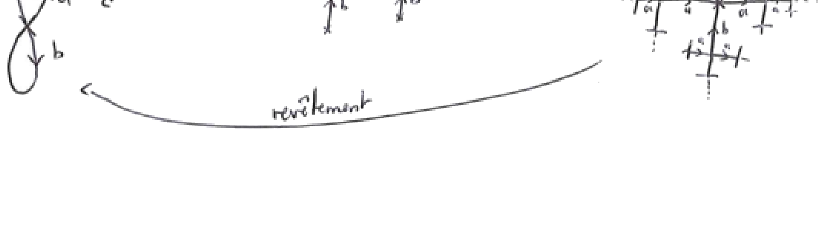
$$St(v, \Gamma) = \{e \in E \mid i(e) = v\}$$

La quantité $|St(v, \Gamma)|$ est appelée la valence de v dans Γ.

Ainsi toute application de graphe $f : \Gamma \to \Delta$ définit pour tout sommet v de Γ une application sur l'étoile de v que l'on note f_v. On peut alors reprendre le vocabulaire de la topologie algébrique et parler d'immersion et de revêtement.

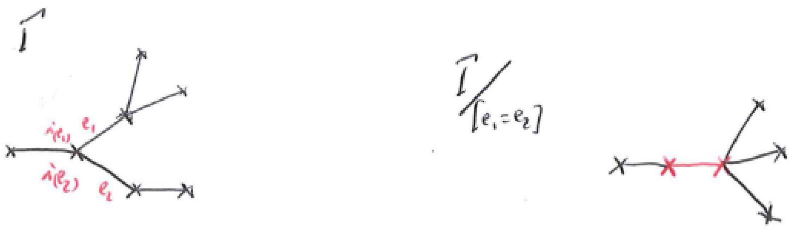
Définition 8. On dit qu'une application de graphe $f : \Gamma \to \Delta$ est :

1. une immersion si et seulement si pour tout sommet v de Γ on a f_v qui est injective.
2. localement surjective si et seulement si pour tout sommet v de Γ on a f_v qui est surjective.
3. un revêtement si et seulement si pour tout sommet v de Γ on a f_v qui est bijective.



On va vouloir prochainement transformer des applications de graphe en immersions. Pour cela on va avoir besoin d'identifier des arêtes. Cela s'appelle du pliage :

Définition 9. Soit Γ un graphe. Une paire d'arêtes (e_1, e_2) de Γ est dite admissible si $i(e_1) = i(e_2)$ et $e_1 \neq e_2$. On peut alors identifier $\tau(e_1)$ et $\tau(e_2)$, e_1 et e_2, $\overline{e_1}$ et $\overline{e_2}$. On obtient donc un graphe dénoté $\Gamma/[e_1 = e_2]$ appelé le pliage de (e_1, e_2) dans Γ ainsi qu'une application projection de Γ dans $\Gamma/[e_1 = e_2]$.



On peut alors faire le parallèle avec la factorisation d'un morphisme f sur l'espace quotienté par le noyau de f.

Proposition 2. *Si $f : \Gamma \to \Delta$ est une application de graphe et (e_1, e_2) une paire admissible d'arêtes de Γ tels que $f(e_1) = f(e_2)$, on dit que f plie cette paire admissible. Alors f se factorise sur $\Gamma/[e_1 = e_2]$.*

Il existe une conséquence immédiate très utile qui nous permettra de construire des immersions.

Corollaire. *Toute application de graphe qui n'est pas une immersion plie au moins une paire d'arêtes admissible.*
Ainsi si Γ est un graphe fini et $f : \Gamma \to \Delta$ une application de graphe alors il existe un nombre fini de pliages $\Gamma = \Gamma_0 \to \Gamma_1 \to \ldots \to \Gamma_n$ et une immersion $\Gamma_n \to \Delta$.

Une autre propriété importante qui sera très utile lors de la preuve du théorème de Hall est une propriété concernant la conservation du groupe fondamental lors d'un pliage.

Proposition 3. *Si (e_1, e_2) est une paire admissible d'un graphe Γ et $f : \Gamma \to \Delta$ une application de graphe qui plie cette paire admissible. Alors pour tout sommet v de Γ d'image w dans le pliage on a $f(\Pi_1(\Gamma, v)) = f(\Pi_1(\Gamma/[e_1 = e_2], w))$.*

Il suffit de remarquer que relever un lacet du quotient revient juste à ajouter des morceaux de la forme $e_1\overline{e_2}$, $e_2\overline{e_1}$, $\overline{e_2}e_1$ ou $\overline{e_1}e_2$ qui sont tous des aller-retours dans le quotient.

2.3 Des remarques sur les revêtements

Nous admettons qu'il existe un revêtement universel pour tout graphe. Si on regarde du point de vue topologie algébrique on remarque effectivement que tout graphe est localement simplement connexe et admet donc un revêtement universel.
On énonce une propriété dont on va se servir pour conclure dans le théorème de Hall, elle concerne l'unicité du relèvement de chemin dans un revêtement :

Proposition 4. *Si $f : \Gamma \to \Delta$ est un revêtement, u un sommet de Γ, p un chemin dans Δ de sommet initial $f(u)$, alors il existe un unique chemin $\tilde{p}$ dans Γ de sommet initial u tel que $f(\tilde{p}) = p$.*

Démonstration. Par récurrence sur la longueur de p.
Si $|p| = 0$ alors $p = \Lambda_{f(u)}$ Comme f préserve la longueur, le chemin recherché est aussi de longueur 0. Or il existe un unique chemin de longueur 0 et de sommet initial u qui est Λ_u et on a bien $f(\Lambda_u) = \Lambda_{f(u)}$.
Supposons maintenant le résultat vrai pour tout $k \leq n$, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit p un chemin de Δ de longueur $n+1$: $p = e_1 \dots e_{n+1}$ qui vérifie $i(e_1) = f(u)$. On note $q = e_1 \dots e_n$, c'est un chemin de longueur n de sommet initial $f(u)$. Par hypothèse de récurrence, on note $\tilde{q}$ l'unique chemin de Γ tel que $f(\tilde{q}) = q$ et $i(\tilde{q}) = u$. On note $w = \tau(\tilde{q})$ ainsi $\tau(q) = f(w)$. Donc e_{n+1} vérifie $i(e_{n+1}) = f(w)$ et $\tau(e_{n+1}) = \tau(p)$. Par bijection de l'application $f_w : St(w, \Gamma) \to St(f(w), \Delta)$ (comme f est un revêtement), il existe une unique arête $\epsilon_{n+1} \in St(w, \Gamma)$ telle que $f(\epsilon_{n+1}) = e_{n+1}$. Ainsi le chemin $\tilde{p} = \tilde{q}\epsilon_{n+1}$ est défini de manière unique et est un chemin de Γ de sommet initial u tel que $f(\tilde{p}) = p$. Ce qui conclut. $\square$

Corollaire. *Si p est un aller-retour alors $\tilde{p}$ est un aller-retour.*

On admet aussi le théorème suivant qui nous permet de relier les revêtements à isomorphisme près avec les sous-groupes du groupe fondamental.

Théorème 5. *Si $f : \Gamma \to \Delta$ est un revêtement et u un sommet de Γ alors $f : \Pi_1(\Gamma, u) \to \Pi_1(\Delta, f(u))$ est injective. En particulier $f(\Pi_1(\Gamma, u))$ est un sous-groupe de $\Pi_1(\Delta, f(u))$.*
De plus si Δ est connexe et v un sommet de Δ, $S \subset \Pi_1(\Delta, v)$ un sous-groupe alors il existe un graphe connexe Γ avec un sommet u et un revêtement $f : \Gamma \to \Delta$ tels que $f(u) = v$ et $f(\Pi_1(\Gamma, u)) = S$. Deux tels revêtements sont isomorphes.

On attire ici l'attention sur une remarque qui nous permet de faire le lien avec les sous-groupes d'indice fini :

Remarque. Avec les notations du théorème, si Γ est un graphe fini alors le sous-groupe S de $\Pi_1(\Delta, v)$ est d'indice fini.

Chapitre 3

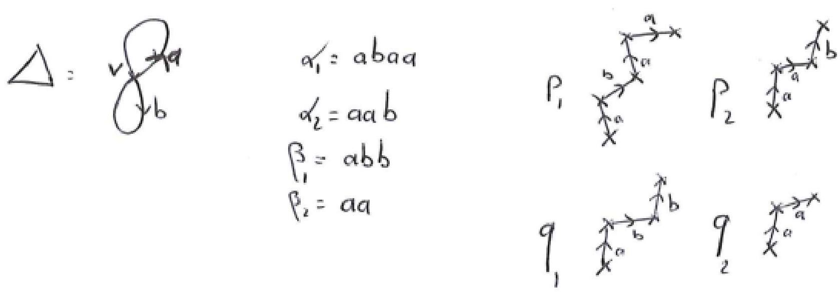
Le théorème de Hall

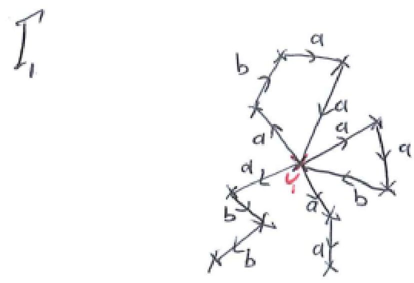
On pose pour toute la suite G un groupe libre et (Δ, v) un bouquet associé et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ des éléments de G. Soit H le sous-groupe de G généré par $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. On suppose que pour tout i on a $\beta_i \notin H$.
On rappelle que l'on veut montrer qu'il existe un revêtement fini $((\Gamma, u), f)$ de (Δ, v) tel que $H \subset f(\Pi_1(\Gamma, u))$ et pour tout i on a $\beta_i \notin f(\Pi_1(\Gamma, u))$.
Pour ce faire nous allons d'abord donner la construction d'un graphe qui sera une immersion de Δ. Ensuite nous nous attellerons à transformer cette immersion en revêtement qui vérifiera les propriétés voulues sur le groupe fondamental.

3.1 Une immersion spécifique

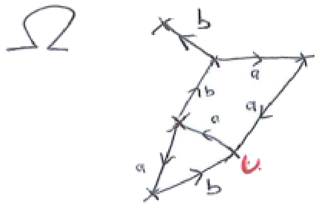
Proposition 6. *Il existe un graphe fini Ω, un sommet u de Ω et $g : \Omega \to \Delta$ une immersion tels que $g(\Pi_1(\Omega, u)) = H$ et tels que pour tout $i \in [|1, \ldots, l|]$ il existe un relevé de β_i dans Ω qui n'est pas un lacet.*

Démonstration. Nous avons d'abord besoin de donner des noms à certains objets. On représente les α_i (respectivement β_i) par des circuit p_i (respectivement q_i) basés en v. On construit alors le graphe Γ_0 comme étant l'union disjointe de k arcs A_i de longueur $|p_i|$ et de l arcs B_i de longueur $|q_i|$. On peut alors voir Γ_0 dans Δ en envoyant les arcs A_i et les B_i respectivement sur les α_i et les β_i. On identifie alors tous les sommets initiaux et terminaux des A_i ainsi que les sommets initiaux des B_i en un unique sommet u_1. On obtient un graphe Γ_1 et une application projection $f : \Gamma_1 \to \Delta$. A la fin on obtient un bouquet de k feuilles subdivisées où on a rajouté des bras comme sur le dessin.





Ainsi f vérifie $f(\Pi_1(\Gamma_1, u_1)) = H$. Grâce aux propriétés des applications de graphe on peut transformer par des pliages ce Γ_1 et ce f en un graphe Ω et une immersion $g : \Omega \to \Delta$. On note u l'image du sommet u_1 dans Ω.



Ω est un graphe fini car Γ_1 est fini on ne fait qu'enlever des arêtes. De plus $g : \Omega \to \Delta$ est une immersion qui vérifie $g(\Pi_1(\Omega, u)) = H$. Par le théorème sur la bijection entre les sous-groupes du groupe fondamental et les revêtements de notre graphe on a déjà qu'il existe un revêtement seulement on a aucune propriété dessus. La spécificité de cette immersion vient de l'ajout des arcs B_i au départ. En effet, après les pliages l'image des arcs des B_i restent des arcs ! Ainsi comme on est en présence d'une immersion on a <u>unicité du relèvement</u> des β_i. Par l'ajout des arcs on obtient l'existence de ce relèvement. Cet argument sera celui utilisé pour démontrer que les β_i ne sont pas dans l'image du groupe fondamental de notre futur revêtement. □

3.2 Transformer une immersion en revêtement

Le second outil pour démontrer le théorème de Hall et la transformation d'une immersion en revêtement dans le cas particulier de l'immersion construite précédemment. Il se trouve que pour transformer notre immersion nous allons avoir besoin de rajouter des arêtes, et uniquement des arêtes ! Cette condition est très importante et cela va nous permettre de préserver des informations sur le groupe fondamental.

Théorème 7. *Soit $f : \Gamma \to \Delta$ une immersion de graphe. On suppose que Δ ne possède qu'un sommet u et que Γ a un nombre fini d'arêtes. Alors il existe un graphe $\tilde{\Gamma}$ qui contient Γ tel que $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$ ne consiste qu'en des arêtes et il existe une application $f' : \tilde{\Gamma} \to \Delta$ qui étend f en un revêtement.*

Démonstration. On note V et E l'ensemble des sommets et des arêtes de Γ. On choisit une orientation O de Δ. Pour chaque $e \in O$ on définit l'ensemble $R_e = \{(u, v) \in V \times V \mid \exists e_1 \in E \ tq \ f(e_1) = e, \ i(e_1) = u, \ \tau(e_1) = v\}$. Comme f est une immersion alors les projections $proj_1 : \left| \begin{array}{ccc} R_e & \to & V \\ (u,v) & \mapsto & u \end{array} \right.$ et $proj_2 : \left| \begin{array}{ccc} R_e & \to & V \\ (u,v) & \mapsto & v \end{array} \right.$ sont des applications injectives qui nous fournissent deux sous-ensembles de V de même cardinal. On note ϕ_e la bijection entre ces deux sous-ensembles. Comme V est fini on peut étendre ϕ_e à tout V. On note alors l'ensemble suivant :

$$S_e = \{(u, \phi_e(u)) | u \in V\}$$

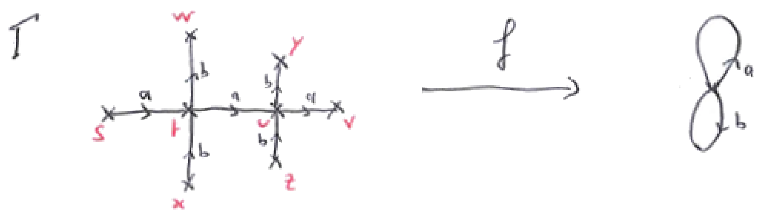
On remarque que $R_e \subset S_e$. On obtient alors un ensemble S_e pour tout $e \in O$.
On définit le graphe $\tilde{\Gamma}$ et f' comme suit :

1. L'ensemble des sommets de $\tilde{\Gamma}$ est V.
2. L'ensemble des arêtes de $\tilde{\Gamma}$ est E' défini comme :

$$E' = \{(u, v, e) \mid u, v \in V,\ e \text{ arête de } \Delta \text{ tq } \left| \begin{array}{llll} si & e \in O & alors & (u,v) \in S_e \\ si & \overline{e} \in O & alors & (v,u) \in S_{\overline{e}} \end{array} \right. \}$$

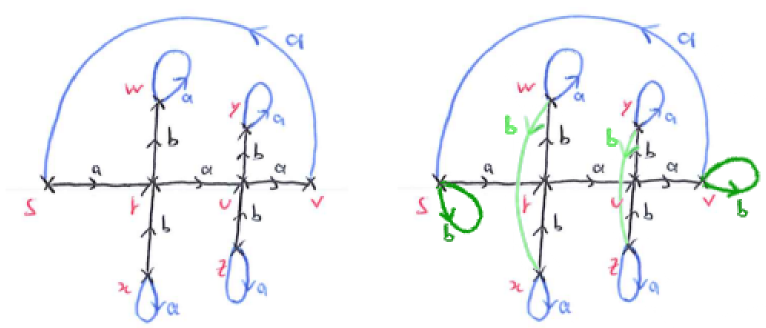
On définit pour $\epsilon = (u, v, e) \in E'$ les objets $\overline{\epsilon} = (v, u, \overline{e})$ et $i(\epsilon) = u$. On peut alors définir $f' : \tilde{\Gamma} \to \Delta$ en envoyant V sur l'unique sommet de Δ et $f'(\epsilon) = e$ pour tout $\epsilon \in E'$.
On vérifie que $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ par l'application $a : \Gamma \to \tilde{\Gamma}$ définie par $a(v) = v$ pour tout sommet $v \in V$ et $a(e_1) = (i(e_1), \tau(e_1), f(e_1))$ pour toute arête $e_1 \in E$. De plus on a $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$ qui ne consiste qu'en des arêtes.
Il faut vérifier que l'on a bien un revêtement.
Soit $w \in V$ on pose $\psi : \left| \begin{array}{ccc} St(w, \tilde{\Gamma}) & \to & St(u, \Delta) \\ (w, z, e) & \mapsto & e \end{array} \right.$. On a ψ injective car si $e = e'$ et $e \in O$ alors (w, z) et (w, z') sont dans S_e et donc $z = \phi_e(w) = z'$. On a le résultat de manière similaire si $\overline{e} \in O$. Pour la surjectivité on prend $e \in St(u, \Delta)$ tel que $e \in O$ alors $(w, \phi_e(w)) \in S_e$ et donc $\psi(w, \phi_e(w), e) = e$, on raisonne de manière similaire si $\overline{e} \in O$. $\square$

On donne ici un exemple d'une telle transformation dans le cadre du groupe libre à deux éléments et où on a choisi comme sous-groupe le groupe trivial (pas de α_i) avec un certain nombre d'éléments β_i. Il faut remarquer que pour la construction de S_a on a fait un choix pour le rajout des arêtes, il y en a d'autres possibles.



$$R_a = \{(s,t), (t,u), (u,v)\}$$

$$S_a = \{(s,t), (t,u), (u,v), (v,s), (w,w), (x,x), (y,y), (z,z)\}$$



3.3 Le théorème de Hall

Nous avons maintenant toutes les clés en main pour démontrer le théorème de Hall.

Théorème 8. *Soit G un groupe libre et (Δ, v) un bouquet associé.*
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ des éléments de G. Soit H le sous-groupe de G généré par $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. On suppose que pour tout i on a $\beta_i \notin H$.
Alors il existe un revêtement fini $((\Gamma, u), f)$ de (Δ, v) tel que $H \subset f(\Pi_1(\Gamma, u))$ et pour tout i on a $\beta_i \notin f(\Pi_1(\Gamma, u))$.

Démonstration. Par la construction de l'immersion spécifique précédente on obtient directement un graphe fini Ω et $g : \Omega \to \Delta$ qui est une immersion vérifiant $g(\Pi_1(\Omega, u)) = H$. On applique le théorème précédent pour transformer cette immersion en revêtement. Cela est possible car g est une immersion, Δ possède un unique sommet v et Ω est un graphe fini. On obtient alors un graphe $\tilde{\Omega}$ qui contient Ω tel que $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$ ne soit que des arêtes ainsi qu'une application $g' : \tilde{\Omega} \to \Delta$ qui étend g et qui soit un revêtement. Ainsi $(\tilde{\Omega}, g')$ est un revêtement fini de Δ. On note $K = g'(\Pi_1(\tilde{\Omega}, u))$. Comme Ω est inclus dans $\tilde{\Omega}$ alors $H \subset K$. Il reste a montrer que pour tout i on a $\beta_i \notin K$. Cela découle de l'argument déjà cité du fait que le relevé d'un β_i dans Ω est un arc et non un lacet. C'est toujours un relevé dans $\tilde{\Omega}$. Par unicité du relevé comme on est en présence d'un revêtement alors $\beta_i \notin K$.
Ainsi en posant $\Gamma = \tilde{\Omega}$ et $f = g'$ on obtient que le revêtement $((\Gamma, u), f)$ répond à notre problème. □

Chapitre 4

Conclusion

Nous avons finalement prouvé que les groupes libres de rang fini sont à sous-groupes séparables. Pour ce faire nous sommes passés par la topologie algébrique sur les graphes. Il nous a fallu passer par la transformation d'une immersion en revêtement dans un cadre particulier. Cette transformation est dûe au mathématicien Stallings.

Bibliographie

[Not14] Mathematical Notes. How stallings proved finitely generated groups are subgroup separable, 2014.

[R.S83] John R.Stallings. Topology of finite graphs. *Inventiones mathematicae*, 1983.